Elementare Herleitung der DIRAC-Gleichung. II

Hans Sallhofer

Z. Naturforsch. **34a**, 772 (1979);
eingegangen am 24. April 1979

Elementary Derivation of the Dirac Equation II

Derivation of an equation, which corresponds to the iterated second-order Dirac equation, in electrodynamics of inhomogeneous media.

Anknüpfend an die Arbeit [1] werde aus der Elektrodynamik (4) [1] eine Gleichung hergeleitet, die der iterierten Dirac-Gleichung zweiter Ordnung entspricht.

Aus (8) [1] und (12) [1] folgt:

$$\begin{aligned} &[(\partial\hat{\gamma})_{ik} - \partial_4\,\delta_{ik}(\varepsilon+\mu)/2]\,\Psi_k = 0\,,\\ &\partial_4 = (1/c)\,\partial/\partial t\,,\\ &\hat{\gamma}_{ik}^{(j)} = \gamma_{ik}^{(j)} \quad \text{für} \quad j = 1,2,3 \quad \text{und} \\ &\hat{\gamma}_{ik}^{(4)} = m\,c^2/(\hbar\,\omega)\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{1}$$

Für die drei $\hat{\gamma}_{ik}^{(j)}$ $(j = 1, 2, 3)$ und für $\hbar\,\omega/(m c^2)$ $\hat{\gamma}_{ik}^{(4)}$ gilt dann die Bedingung

$$\hat{\gamma}_{ik}^{(p)}\,\hat{\gamma}_{kl}^{(q)} = \begin{cases} -\,\hat{\gamma}_{ik}^{(q)}\,\hat{\gamma}_{kl}^{(p)} & \text{für} \quad p \neq q\,,\\ \delta_{ik} & \text{für} \quad p = q\,. \end{cases} \tag{2}$$

Differentiert man die Differenz in (15) mit der gleichgliedrigen Summe, also

$$\begin{aligned} &[(\partial\hat{\gamma})_{ik} + \partial_4\,\delta_{ik}(\varepsilon+\mu)/2]\\ &\quad\cdot[(\partial\hat{\gamma})_{kl} - \partial_4\,\delta_{kl}(\varepsilon+\mu)/2]\,\Psi_l = 0\,, \end{aligned} \tag{3}$$

so kommt mit Rücksicht auf (16) und Blick auf (7) [1] die gesuchte Gleichung zweiter Ordnung:

$$\begin{aligned} &[(\Delta - (1/c^2)\,\varepsilon\,\mu\,\partial^2/\partial t^2)\,\delta_{ik}\\ &\quad - (\boldsymbol{\nabla\gamma}(\varepsilon+\mu)/2)_{ik}(1/c)\,\partial/\partial t]\,\Psi_k = 0\,. \end{aligned} \tag{4}$$

Der rechte Summand in der äußeren Klammer enthält keine relativistischen Glieder und fällt für jede Komponente von Ψ verschieden aus. Dagegen gilt der links stehende, Klein-Gordon-ähnliche Operator für jede Komponente gleichermaßen. — Trägt man in ihn ε und μ nach (12) [1] unter der Annahme (9) [1] und Vernachlässigung einer unwesentlichen Integrationskonstanten ein, so kommt die Gleichung

$$\begin{aligned} &[\Delta - (1/c^2)\,\partial^2/\partial t^2 - (2\,i/\hbar\,c^2)\,\Phi\,\partial/\partial t\\ &\quad + (1/\hbar^2\,c^2)(\Phi^2 - m^2\,c^4)]\,\Psi_k = 0\,. \end{aligned} \tag{5}$$

Hier erkennt man die relativistische Schrödinger-Gleichung, die bekanntlich auf die Sommerfeld-Formel führt. Man sieht mithin: Die Elektrodynamik für inhomogene Medien (4) [1] enthält den Formalismus der relativistischen Mechanik.

Sonderdruckanforderungen an Dr. H. Sallhofer, Fischerstraße 12, A-5280 Braunau, Austria.

0340-4811 / 79 / 0600-0772 $ 01.00/0

[1] H. Sallhofer, Z. Naturforsch. **33a**, 1378 (1978).